Münster.1928,№ 13

Phil. Diss.

Mathematik

Metrische Erzeugungsarten der Steinerschen Fläche

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster i. W.

vorgelegt von

Kurt Friedrich Hartung
aus Lindstedt (Kreis Gardelegen)

Universitätsverlag von Robert Noske in Borna-Leipzig
1928

Referent: Herr Professor Dr. R. König
Dekan: Herr Professor Dr. v. Salis

Tag der mündlichen Prüfung: 2. August 1927

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen Eltern gewidmet

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

§ 1. Die allgemeine St. F. als geometrischer Ort von homologen Punkten in gleichstimmig-kongruenten Tetraedern, die einem beliebigen Tetraeder einbeschrieben sind 2

§ 2. Die St. F. mit senkrecht aufeinanderstehenden Doppelgeraden als geometrischer Ort der Schwerpunkte in gleichstimmig-kongruenten gleichflächigen Tetraedern, die einem ähnlichen gleichflächigen Tetraeder einbeschrieben sind 6

§ 3. Die Abhängigkeit der Parameter λ, μ, ν von den Schwerpunktskoordinaten in gleichstimmig-kongruenten regulären Tetraedern, die einem gegebenen regulären Tetraeder einbeschrieben sind 11

§ 4. Metrische Erzeugung der beliebigen St. F. 23

§ 5. Erzeugung von St. F. mit Doppelgeraden, die aufeinander senkrecht stehen 26

§ 6. Erzeugung der St. F. mit 4 Doppelberührungskreisen. — Konstruktion von gleichstimmig-kongruenten regulären Tetraedern, die einem gegebenen regelmäßigen Tetraeder ein- bzw. umbeschrieben sind 28

Metrische Erzeugungsarten der Steinerschen Fläche.

Einleitung.

Die Steinersche Fläche kann als diejenige Fläche definiert werden, bei der die homogenen Koordinaten eines veränderlichen Punktes durch beliebige quadratische Formen dreier unabhängiger Parameter dargestellt werden[1]). Im Anschluß an diese Erklärungsweise lassen sich in der Maßgeometrie Punktörter und Erzeugungsarten von Steinerschen Flächen mit vier endlichen Doppelberührungskegelschnitten[2]) gewinnen. Der Grundgedanke ist hierbei, auf ein räumliches System von Punkten eine Ähnlichkeitstransformation auszuüben und dabei solche Bedingungen vorzuschreiben, daß die linearen Koeffizienten in den drei Parametern λ, μ, ν der verwandten orthogonalen Substitution fortfallen. Auf diese Weise ist es möglich, entsprechende Koordinaten X_i ($i = 1, 2, 3, 4$) als rationale homogene quadratische Funktionen der drei unabhängigen Parameter λ, μ, ν auszudrücken.

Der allgemeine Gesichtspunkt wird in § 1 dadurch verwirklicht, daß einem gegebenen Tetraeder in geeigneter Weise gleichstimmig kongruente Tetraeder einbeschrieben werden und für bestimmte entsprechend liegende Punkte die St. F. als geometrischer Ort nachgewiesen wird. Durch Spezialisierung dieser allgemeinen Betrachtung ergeben sich dann in § 2 ausgezeichnete St. F., unter anderen auch die Form, deren singuläre Ebenen

---

[1]) Vgl. Clebsch, Über die Steinersche Fläche (Crelle's Journal Bd. 67 S. 1—22, 1867).

[2]) Diese speziellen Flächen, die wir weiterhin abgekürzt durch „St. F." bezeichnen, ergeben sich aus der Beschränkung auf reelle Koordinaten, reelle Parameter der vorkommenden orthogonalen Transformationen usw.

ein regelmäßiges Tetraeder bilden (Fig. 1)[3]. In dem letzteren Falle verlangt das zugrunde gelegte metrische Problem, gleichgroße reguläre Tetraeder einem gegebenen regelmäßigen Vierflach einzubeschreiben. Diesen speziellen Fall behandeln wir in § 3 besonders ausführlich in der Meinung, daß die bisher wohl noch nicht gelöste Aufgabe eine gewisse Beachtung beanspruchen darf[4].

Unserer allgemeinen Überlegung wird weiter in § 4 dadurch Rechnung getragen, daß wir das beliebige Tetraeder $F_1F_2F_3F_4$ um sämtliche durch den beliebig angenommenen Punkt O gehende Geraden um dieselbe Amplitude rotieren lassen und dann jedesmal durch die den Eckpunkten F_1, F_2, F_3, F_4 entsprechenden Ecken Ebenen legen, die der Reihe nach senkrecht auf den Geraden OF_1, OF_2, OF_3, OF_4 stehen. Wir werden nämlich beweisen, daß in den von den letzteren Ebenen gebildeten Tetraedern entsprechende Punkte auf St. F. liegen. Diese Erzeugungsart benutzen wir in § 5, um wieder unter Annahme von besonderen Verhältnissen spezielle Formen von St. F. zu gewinnen. Schließlich ergibt sich im einfachsten Falle, den wir in § 6 betrachten, eine Beziehung, die es ermöglicht, die geometrischen Konstruktionen anzugeben, um einem regulären Tetraeder gleichstimmig kongruente regelmäßige Vierflache ein- oder umzubeschreiben.

§ 1.

Die allgemeine St. F. als geometrischer Ort von homologen Punkten in gleichstimmig-kongruenten Tetraedern, die einem beliebigen Tetraeder einbeschrieben sind.

Satz I: „Fällt man von dem beliebigen Punkte O aus auf die Seitenflächen des beliebigen Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ die Lote und bezeichnet die Fußpunkte mit F_1, F_2, F_3, F_4, so liegen die zu O homologen Punkte von gleichstimmig

[3]) Das betr. Modell ist Eigentum der Verlagshandlung Martin Schilling, die mir entgegenkommender Weise den Abdruck gestattete.

[4]) Bezüglich der Einbeschreibung der übrigen reziproken regelmäßigen Körper ineinander, vgl. Killing u. Hovestadt, Handbuch des mathem. Unterrichts Bd. II S. 337, 1913.

kongruenten Tetraedern, die zu $F_1F_2F_3F_4$ gleichstimmig oder symmetrisch ähnlich und $P_1P_2P_3P_4$ in entsprechender Weise einbeschrieben sind, auf einer St. F.“.

Wir wollen den vorstehenden Satz analytisch beweisen. Zu dem Zweck mögen in bezug auf ein festes rechtwinkliges Kartesisches Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O die Seitenflächen $P_2P_3P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_2P_3$ des beliebigen Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ der Reihe nach die folgenden Gleichungen haben:

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Dann lassen sich die Fußpunkte $F_i (i = 1, 2, 3, 4)$ der von O auf diese Seitenflächen gefällten Lote in den Koordinaten des angenommenen Systems wie folgt angeben:

$$F_i: \frac{-A_i D_i}{E_i^2}, \quad \frac{-B_i D_i}{E_i^2}, \quad \frac{-C_i D_i}{E_i^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{2}$$

Hierin bedeuten:

$$E_i^2 \equiv A_i^2 + B_i^2 + C_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{2a}$$

Sollen sämtliche Tetraeder aufgesucht werden, die zu $F_1F_2F_3F_4$ gleichstimmig oder symmetrisch ähnlich sind und von denen die F_1, F_2, F_3, F_4 entsprechenden Eckpunkte der Reihe nach auf den Seitenflächen $P_2P_3P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_2P_3$ liegen, so kann man sich diese einbeschriebenen Tetraeder aus dem einbeschriebenen Vierflach $F_1F_2F_3F_4$ dadurch hervorgegangen denken, daß man mit dem letzteren Tetraeder eine beliebige Verlegung mit gleichzeitiger gleich- oder gegensinniger Streckung vornimmt und fordert, daß nach diesem Vorgang je eine Ecke auf eine entsprechende Seitenfläche des Ausgangstetraeders $P_1P_2P_3P_4$ zu liegen kommt. Die Ähnlichkeitstransformation, die auf sämtliche Punkte von $F_1F_2F_3F_4$ ausgeübt werden muß, ist zusammengesetzt aus einer Parallelverschiebung des ursprünglichen Systems und einer Richtungsänderung desselben unter gleichzeitiger gleich- oder gegenläufiger Streckung. Demgemäß kann man hierfür folgende Substitutionsformeln in Anwendung bringen:

$$
\begin{aligned}
x &= X + \varepsilon x', \\
y &= Y + \varepsilon y', \\
z &= Z + \varepsilon z'.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Dabei sind X, Y, Z in bezug auf das alte System $Oxyz$ die Koordinaten von dem Anfangspunkt O' des neuen rechtwinkligen, im übrigen beliebigen Koordinatensystems $O'x'y'z'$. Der Parameter ε ist die Maßzahl für die lineare Vergrößerung bzw. Verkleinerung der gleich- oder gegensinnigen Streckung, je nachdem ε ein positives oder negatives Vorzeichen besitzt. Denken wir uns das neue System $O'x'y'z'$ konzentrisch zu dem gegebenen Koordinatensystem $Oxyz$, so gehen die Koordinaten des ersten Systems aus denen des zweiten durch eine orthogonale Transformation dritter Ordnung mit der Determinante $+1$ hervor. Die hierfür gültigen Formeln, in denen die Koeffizienten rational durch drei unabhängige Größen λ, μ, ν ausgedrückt sind, lauten bekanntlich:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}[(1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)x + 2(\lambda\mu-\nu)y \\
&\qquad + 2(\lambda\nu+\mu)z], \\
y' &= \frac{1}{(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}[2(\lambda\mu+\nu)x + (1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2)y \\
&\qquad + 2(\mu\nu-\lambda)z], \\
z' &= \frac{1}{(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}[2(\lambda\nu-\mu)x + 2(\mu\nu+\lambda)y \\
&\qquad + (1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2)z].
\end{aligned} \tag{4}
$$

Es lassen sich dann die positiven Seiten der Achsen des alten Systems in die entsprechenden des neuen durch eine Rotation überführen, für die die Richtungswinkel α, β, γ der Achse und der Rotationswinkel ϑ folgenden Gleichungen genügen:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}, \\
\mu &= \cos\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}, \\
\nu &= \cos\gamma \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Wir üben jetzt die Transformation (4) auf die vier Ecken des Tetraeders $F_1F_2F_3F_4$ aus, d. h. wir ersetzen in den Gleichungen (4) x, y, z durch die Koordinaten von F_1, F_2, F_3 bzw. F_4, und gehen hiermit in die Formel (3) ein. Die Koordinaten der so transformierten Punkte F_1, F_2, F_3 bzw. F_4 setzen wir der Reihe nach in die Gleichungen von (1) für $i = 1, 2, 3, 4$ ein, um so noch der zweiten Forderung zu genügen, daß nämlich die Eckpunkte des der Ähnlichkeitstransformation unterworfenen Tetraeders $F_1F_2F_3F_4$ auch auf die betreffenden Seitenflächen von $P_1P_2P_3P_4$ zu liegen kommen. Dann ergeben sich die nachstehenden Beziehungen:

$$
(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_i X + B_i Y + C_i Z + D_i \\
&- \frac{\varepsilon D_i}{(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)E_i^2}\,[E_i^2 + \lambda^2(A_i^2 - B_i^2 - C_i^2) \\
&\quad + \mu^2(-A_i^2 + B_i^2 - C_i^2) + \nu^2(-A_i^2 - B_i^2 + C_i^2) \\
&\quad + 4(A_iB_i\lambda\mu + A_iC_i\lambda\nu + B_iC_i\mu\nu)] = 0, \\
&\quad i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}\right.
$$

Werden diese 4 Gleichungen nach X, Y, Z, 1, d. h. den Koeffizienten in den ersten 4 Gliedern von A_i, B_i, C_i, D_i aufgelöst, so erhält man:

$$
(7)\quad \left\{\begin{aligned}
(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2) + \varepsilon(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{g}_1) &= 0, \\
(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2) + \varepsilon(\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2) &= 0, \\
(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2) + \varepsilon(\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{g}_3) &= 0, \\
(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2) + \varepsilon(\mathfrak{p}_4 + \mathfrak{g}_4) &= 0.
\end{aligned}\right.
$$

In (7) bedeuten $\mathfrak{g}_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ homogene quadratische Funktionen in λ, μ, ν und $\mathfrak{p}_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ Ausdrücke, die keine der Größen λ, μ, ν enthalten. Eliminiert man in (7) aus der 2., 3. und 4. Gleichung jedesmal im Verein mit der 1. Gleichung die absoluten Glieder, so stellen sich die Koordinaten X, Y, Z als gebrochene rationale homogene Funktionen der drei unabhängigen Parameter λ, μ, ν mit denselben Nennern dar, wobei sämtliche im Zähler auftretende quadratische Formen in λ, μ, ν noch den Parameter ε enthalten, d. h. die zu O homologen Punkte

von gleichstimmig kongruenten Tetraedern, die zu $F_1F_2F_3F_4$ gleichstimmig oder symmetrisch ähnlich und $P_1P_2P_3P_4$ in entsprechender Weise einbeschrieben sind, liegen auf einer St. F. Aus der Entstehungsweise entnimmt man, daß jede solche Fläche vier doppelt berührende endliche Kegelschnitte besitzt. Wir werden dies auch bei der noch folgenden Betrachtung von speziellen Beispielen bestätigt finden. Im Gegensatz zu den endlichen Flächenpunkten muß aber den Punkten der Doppelgeraden eine Ausnahmestellung zukommen. Wir machen hierzu folgende Bemerkung. Aus den Beziehungen (7) geht hervor, daß zu gegebenen Werten λ, μ, ν sich die Koordinaten X, Y, Z sowie die Größe ε eindeutig berechnen lassen. Dagegen ist die Frage noch unerledigt, wie man zu einem gegebenen Koordinatentripel X, Y, Z die entsprechenden Werte von λ, μ, ν und ε bestimmen kann. Wir werden diese Aufgabe, λ, μ, ν explizit durch X, Y, Z und ε auszudrücken, bei dem einfachsten Falle einer solchen Einbeschreibung in § 3 unserer Ausführung behandeln und sehen, daß für die Punkte der Doppelgeraden die Berechnung der Transformationsparameter λ, μ, ν unbestimmt wird.

§ 2.

Die St. F. mit senkrecht aufeinanderstehenden Doppelgeraden als geometrischer Ort der Schwerpunkte in gleichstimmig-kongruenten gleichflächigen Tetraedern, die einem ähnlichen gleichflächigen Tetraeder einbeschrieben sind.

Wir wollen jetzt die Gleichungen der St. F. herleiten, die sich ergeben, wenn man in dem eingangs (§ 1) bewiesenen Satze statt des beliebigen Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ ein gleichflächiges[5])

[5]) In einem gleichflächigen Tetraeder sind je 2 Gegenwinkel gleich, ferner je 2 Gegenkanten und alle 4 Eckensinus. Bezeichnet man die Kosinus der 3 ungleichen Flächenwinkel mit γ_1, γ_2, γ_3, so besteht folgende Determination $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$. Geometrisch gewinnt man ein solches gleichflächiges Tetraeder, wenn man in einem gegebenen Rechtkant mit 3 ungleichen Kanten 4 nicht benachbarte Eckpunkte miteinander verbindet. Aus dieser Entstehungsweise kann man unschwer sämtliche genannten Eigenschaften nachweisen.

Tetraeder und O als dessen Schwerpunkt annimmt. Die Seitenflächen eines solchen Tetraeders (Fig. 2) kann man in folgender Form zugrunde legen:

$$
\begin{aligned}
a x + b y + c z - 1 &= 0, \\
-a x + b y - c z - 1 &= 0, \\
-a x - b y + c z - 1 &= 0, \\
a x - b y - c z - 1 &= 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Der Schwerpunkt von $P_1P_2P_3P_4$ fällt dann mit dem Nullpunkt O zusammen. Setzen wir zur Abkürzung:

$$e^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2, \tag{9}$$

so haben die Fußpunkte F_1, F_2, F_3, F_4 der von O auf die Seitenflächen (8) gefällten Lote folgende Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
F_1&: \quad \frac{a}{e^2}, \quad \frac{b}{e^2}, \quad \frac{c}{e^2}; \\
F_2&: \quad \frac{-a}{e^2}, \quad \frac{b}{e^2}, \quad \frac{-c}{e^2}; \\
F_3&: \quad \frac{-a}{e^2}, \quad \frac{-b}{e^2}, \quad \frac{c}{e^2}; \\
F_4&: \quad \frac{a}{e^2}, \quad \frac{-b}{e^2} \quad \frac{-c}{e^2}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Wir ersetzen nun in den Gleichungen (4) x, y, z durch die Koordinaten von F_1, F_2, F_3 bzw. F_4 aus (10) und gehen hiermit in die Formeln (3) ein. Die Koordinaten der so transformierten Punkte F_1, F_2, F_3 bzw. F_4 setzen wir der Reihe nach in die Gleichungen (8) ein und erhalten so:

$$
\begin{aligned}
&e^2 (a X + b Y + c Z - 1)(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \\
&\qquad + \varepsilon [\Sigma + 4 (a b \lambda \mu + a c \lambda \nu + b c \mu \nu)] = 0, \\
&e^2 (-a X + b Y - c Z - 1)(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \\
&\qquad + \varepsilon [\Sigma + 4 (-a b \lambda \mu + a c \lambda \nu - b c \mu \nu)] = 0, \\
&e^2 (-a X - b Y + c Z - 1)(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \\
&\qquad + \varepsilon [\Sigma + 4 (-a b \lambda \mu - a c \lambda \nu + b c \mu \nu)] = 0,
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&e^2\,(a\,X - b\,Y - c\,Z - 1)\,(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\\
&\qquad + \varepsilon\,[\Sigma + 4\,(a\,b\,\lambda\,\mu - a\,c\,\lambda\,\nu - b\,c\,\mu\,\nu)] = 0,\\
&\text{wobei } \Sigma = e^2 + \lambda^2\,(a^2 - b^2 - c^2) + \mu^2\,(-a^2 + b^2 - c^2)\\
&\qquad + \nu^2\,(-a^2 - b^2 + c^2) \text{ ist.}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Wir addieren sämtliche 4 Gleichungen (11), ferner subtrahieren wir die 2. und 3. Gleichung von der Summe der 1. und 4., sodann subtrahieren wir die 3. und 4. Gleichung von der Summe der 1. und 2. Gleichung, und endlich bilden wir noch die Differenz aus der Summe der 1. und 3. Gleichung und der Summe der 2. und 4. Gleichung. Dann bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
&-e^2\,(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + \varepsilon\,[e^2 + \lambda^2\,(a^2 - b^2 - c^2)\\
&\qquad + \mu^2\,(-a^2 + b^2 - c^2) + \nu^2\,(-a^2 - b^2 + c^2)] = 0\\
&e^2\,a\,X\,(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + 4\,\varepsilon\,b\,c\,\mu\,\nu = 0,\\
&e^2\,b\,Y\,(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + 4\,\varepsilon\,a\,c\,\lambda\,\nu = 0,\\
&e^2\,c\,Z\,(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + 4\,\varepsilon\,a\,b\,\lambda\,\mu = 0.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
a\,X &= \frac{-2\,(\varepsilon - 1)\,b\,c\,\mu\,\nu}{\lambda^2\,(b^2 + c^2) + \mu^2\,(a^2 + c^2) + \nu^2\,(a^2 + b^2)},\\
b\,Y &= \frac{-2\,(\varepsilon - 1)\,a\,c\,\lambda\,\nu}{\lambda^2\,(b^2 + c^2) + \mu^2\,(a^2 + c^2) + \nu^2\,(a^2 + b^2)},\\
c\,Z &= \frac{-2\,(\varepsilon - 1)\,a\,b\,\lambda\,\mu}{\lambda^2\,(b^2 + c^2) + \mu^2\,(a^2 + c^2) + \nu^2\,(a^2 + b^2)}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Das ist aber die Parameterdarstellung der für eine St. F. mit den inhomogenen Koordinaten X, Y, Z charakteristischen Gleichungsform:

$$
\begin{aligned}
&a^4\,b^4\,(a^2 + b^2)\,X^2\,Y^2 + a^4\,c^4\,(a^2 + c^2)\,X^2\,Z^2\\
&\qquad + b^4\,c^4\,(b^2 + c^2)\,Y^2\,Z^2 + 2\,(\varepsilon - 1)\,a^3\,b^3\,c^3\,X\,Y\,Z = 0.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Alle Flächen, die durch Variation der Größe ε aus (14) hervorgehen, haben dieselben aufeinander senkrecht stehenden 3 Doppelgeraden, nämlich die Koordinatenachsen, und demgemäß besitzen sie auch den Nullpunkt als gemeinsamen triplanaren Punkt. Vergleicht man die Koordinaten der Ecken des Ausgangstetraeders $P_1P_2P_3P_4$ (Fig. 2) mit den Koordinaten von

F_1, F_2, F_3, F_4 in (10), so geht hervor, daß das Tetraeder $F_1F_2F_3F_4$ zu $P_1P_2P_3P_4$ symmetrisch ähnlich ist. Beachtet man noch, daß die Koordinatenachsen mit den 3 Verbindungslinien der Mitten der drei Paare gegenüberliegender Kanten von $P_1P_2P_3P_4$ zusammenfallen, so können wir folgenden Satz formulieren:

Satz II: „Fällt man von dem Schwerpunkt des gleichflächigen Tetraeders $F_1F_2F_3F_4$ auf seine Seitenflächen die Lote mit den Fußpunkten F_1, F_2, F_3, F_4, so bilden die letzteren Punkte ein zu $P_1P_2P_3P_4$ symmetrisch ähnliches Tetraeder. Die Schwerpunkte von allen in entsprechender Weise einbeschriebenen gleichstimmig kongruenten Tetraedern, die zu $F_1F_2F_3F_4$ gleichstimmig oder symmetrisch ähnlich sind, liegen auf St. F. mit 3 aufeinander senkrecht stehenden Doppelgeraden, die für sämtliche Flächen mit den 3 Verbindungslinien der Mitten der drei Paare gegenüberliegender Kanten des Ausgangstetraeders zusammenfallen."

Der einfachste Fall der Einbeschreibung kommt offenbar dann zustande, wenn O der Schwerpunkt eines regelmäßigen Tetraeders ist und demgemäß die einzubeschreibenden Vierflache ebenfalls regelmäßig werden. Damit gewinnt man sämtliche regulären Tetraeder, die sich einem regelmäßigen Vierflach einbeschreiben lassen. Das letztere ist leicht einzusehen. Sind nämlich wieder F_1, F_2, F_3, F_4 die Fußpunkte der von O auf die Seitenflächen des regelmäßigen Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ gefällten Lote, so bestimmen wir zunächst solche einbeschriebenen regelmäßigen Vierflache, die aus dem regulären Tetraeder $F_1F_2F_3F_4$ durch eine Ähnlichkeitstransformation hervorgehen, wobei die neuen Ecken auf denselben Seitenflächen wie die ihnen entsprechenden Punkte F_1, F_2, F_3, F_4 gelegen sein sollen. Eine Änderung der Reihenfolge der Eckpunkte in ihrer Zuordnung zu den Seitenflächen des regelmäßigen Ausgangstetraeders kommt nun einfach dadurch zum Ausdruck, daß man jedes bereits einbeschriebene regelmäßige Vierflach auf 12 verschiedene Arten

zur Deckung desselben Raumes bringt, so daß jeder Eckpunkt in der neuen Lage seinen ursprünglichen Ort oder den eines anderen Eckpunktes annimmt. Daraus geht hervor, daß bereits die zuerst vorgenommene Zuordnung sämtliche einbeschriebenen regulären Tetraeder liefert.

Um die Flächengleichungen für diesen einfachsten Fall aus dem Vorausgegangenen zu entnehmen, haben wir $a = b = c = 1$ zu setzen. Statt der Gleichungen (12) ergeben sich dann:

$$
\begin{aligned}
&-3(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)+\varepsilon(3-\lambda^2-\mu^2-\nu^2)=0,\\
&3X(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)+4\varepsilon\mu\nu=0,\\
&3Y(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)+4\varepsilon\lambda\nu=0,\\
&3Z(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)+4\varepsilon\lambda\mu=0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Ferner erhält man aus der Gleichung (14) die nachstehende:

$$
X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2+(\varepsilon-1)XYZ=0. \tag{17}
$$

Das sind St. F., deren 4 reelle singuläre Ebenen zu den Seitenflächen des regelmäßigen Ausgangstetraeders parallel sind. Wir können somit den folgenden Satz aussprechen:

Satz III: „Die Schwerpunkte von gleichstimmig kongruenten regelmäßigen Tetraedern, die einem gegebenen regelmäßigen Vierflach $P_1P_2P_3P_4$ einbeschrieben sind, liegen auf St. F., deren 4 Doppelberührungsebenen zu den Seitenebenen von $P_1P_2P_3P_4$ parallel sind und deren triplanare Punkte mit dem Schwerpunkt des regelmäßigen Ausgangstetraeders zusammenfallen."

In solchen gleichstimmig kongruenten Tetraedern, die einem gegebenen regelmäßigen Vierflach einbeschrieben sind, gibt es 4 weitere stets entsprechend anzunehmende Punkte, die auf St. F. liegen. Man kann dies in folgender Weise einsehen. Die vier Punkte A', B', C', D' mögen in dem regulären Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ eine solche Lage haben, daß sie aus den Eckpunkten P_1, P_2, P_3, P_4 durch Spiegelung am Schwerpunkt O und darauf erfolgende gleichsinnige doppelte Streckung hervorgehen. Werden von diesen Punkten A', B', C', D' die Lote auf die Seitenebenen von $P_1P_2P_3P_4$ gefällt, so ergeben die Fußpunkte jedesmal

ein einbeschriebenes regelmäßiges Vierflach, dessen Kante mit der von $P_1P_2P_3P_4$ übereinstimmt. In diesen 4 einbeschriebenen regulären Tetraedern ergeben sich die Punkte A', B', C', D' dadurch, daß man die Schwerpunkte an den Seitenflächen spiegelt. Mithin liegen in gleichstimmig kongruenten regelmäßigen Tetraedern, die dem regulären Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ einbeschrieben sind, die Spiegelpunkte der Schwerpunkte an den Seitenebenen auf St. F., deren dreifache Punkte sich in A', B', C', D' befinden. Unsere letzte Überlegung ergibt den nachstehenden Satz:

Satz IV: „Spiegelt man die Schwerpunkte von gleichstimmig kongruenten regulären Tetraedern, die dem gegebenen regelmäßigen Vierflach $P_1P_2P_3P_4$ einbeschrieben sind, an ihren Seitenflächen, so erhält man St. F., deren triplanare Punkte mit denjenigen Punkten zusammenfallen, die aus den Eckpunkten des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ durch Spiegelung an dessen Schwerpunkt und darauf erfolgende gleichstimmige doppelte Streckung hervorgehen."

§ 3.

Die Abhängigkeit der Parameter λ, μ, ν von den Schwerpunktskoordinaten in gleichstimmig-kongruenten regulären Tetraedern, die einem gegebenen regulären Tetraeder einbeschrieben sind.

Wir wollen nunmehr die Aufgabe, λ, μ, ν explizit durch X, Y, Z auszudrücken, im folgenden für die speziellen Gleichungen (16) in Angriff nehmen[6]). Zu dem Zweck gehen wir mit dem Wert für ε aus der 1. Gleichung von (16) in die übrigen ein und bekommen so:

$$
\begin{aligned}
&(3-\lambda^2-\mu^2-\nu^2)\,X+4\,\mu\nu=0\,,\\
&(3-\lambda^2-\mu^2-\nu^2)\,Y+4\,\lambda\nu=0\,,\\
&(3-\lambda^2-\mu^2-\nu^2)\,Z+4\,\lambda\mu=0\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

[6]) Vgl. den Schluß von § 1.

Um die gemeinsamen Lösungen λ, μ, ν der vorstehenden Gleichungen aufzufinden, fassen wir diese 3 Gleichungen als 3 Flächen 2. Ordnung in den Punktkoordinaten λ, μ, ν auf. Diese haben im allgemeinen acht Punkte gemeinschaftlich. Zur Bestimmung der letzteren führen wir neue Koordinaten y_1, y_2, y_3 derart ein, daß sich die Quadrate ${y_1}^2$ und ${y_2}^2$ der ersten beiden Gleichungen von (18) linear durch ${y_3}^2$ darstellen lassen. Werden dann die entsprechenden Werte von y_1 und y_2 in die 3. Gleichung eingesetzt, so erhalten wir für y_3 eine Gleichung 8. Grades.

Wir lösen zunächst die Aufgabe, die in den beiden ersten Gleichungen von (18) enthaltenen homogenen quadratischen Gleichungen von 3 Variabeln

$$(19) \qquad \begin{aligned} -(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\,X+4\mu\nu&=0\,,\\ -(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\,Y+4\lambda\nu&=0 \end{aligned}$$

als Summe derselben 3 Quadrate darzustellen. Da jede der beiden Gleichungen, die man als Kegelschnitte in drei homogenen Punktkoordinaten auffassen kann, dann die Form von drei Quadraten der Variabeln annimmt, wenn man ein Polardreieck zum Koordinatendreieck wählt, so kommt die gleichzeitige Reduktion der beiden Gleichungen auf eine Summe von drei Quadraten darauf hinaus, das gemeinsame Polardreieck zu bestimmen. Um die 3 Punkte zu ermitteln, für welche die beiden Kegelschnitte einzeln dieselbe Polare besitzen, behandeln wir diese Aufgabe zunächst ganz allgemein und gehen dieserhalb von 2 Kegelschnitten in allgemeiner Form aus:

$$(20) \qquad \sum_1^3 a_{ik}\,x_i\,x_k=0\,, \qquad \sum_1^3 b_{ik}\,x_i\,x_k=0\,.$$

Die Polare des Punktes x' in bezug auf beide Kegelschnitte (20) ist:

$$(21) \qquad \sum_1^3 a_{ik}\,x_i'\,x_k=0\,, \qquad \sum_1^3 b_{ik}\,x_i'\,x_k=0\,.$$

Soll der Punkt x' für beide Kegelschnitte (20) dieselbe Polare besitzen, sollen also die Gleichungen (21) dieselbe Gerade

darstellen, so dürfen sich in ihnen die entsprechenden Koeffizienten von x_1, x_2, x_3 nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Die Variable x_ε hat in der ersten Gleichung den Koeffizienten $\sum_1^3 a_{\varepsilon k} x_k'$, in der zweiten lautet der entsprechende Koeffizient $\sum_1^3 b_{\varepsilon k} x_k'$, so daß folgende Gleichungen bestehen müssen:

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \omega b_{11})\, x_1' + (a_{12} - \omega b_{12})\, x_2' + (a_{13} - \omega b_{13})\, x_3' = 0\,,\\
&(a_{21} - \omega b_{21})\, x_1' + (a_{22} - \omega b_{22})\, x_2' + (a_{23} - \omega b_{23})\, x_3' = 0\,,\\
&(a_{31} - \omega b_{31})\, x_1' + (a_{32} - \omega b_{32})\, x_2' + (a_{33} - \omega b_{33})\, x_3' = 0\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

Hieraus folgt die ω-Gleichung der beiden Kegelschnitte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega b_{11} & a_{12} - \omega b_{12} & a_{13} - \omega b_{13} \\ a_{21} - \omega b_{21} & a_{22} - \omega b_{22} & a_{23} - \omega b_{23} \\ a_{31} - \omega b_{31} & a_{32} - \omega b_{32} & a_{33} - \omega b_{33} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{23}$$

Sucht man zu jeder Wurzel ω ein Wertsystem x_1', x_2', x_3', das den Gleichungen (22) genügt, und wählt man 3 homogene lineare Funktionen y_1, y_2, y_3 von x_1, x_2, x_3 derartig, daß jede unter ihnen für je zwei der gefundenen Wertsysteme x_1', x_2', x_3' verschwindet, so kann man umgekehrt 3 lineare Funktionen x_1, x_2, x_3 von y_1, y_2, y_3 darstellen, die die verlangte Reduktion herbeiführen.

Wir wenden diese Überlegung auf unser vorliegendes Beispiel an. Das sind die beiden Gleichungen (19). Den allgemeinen Gleichungen (22) entsprechen dann:

$$\begin{aligned}
&(-X + \omega Y)\,\lambda' - 2\omega\nu' = 0\,,\\
&(-X + \omega Y)\,\mu' + 2\nu' = 0\,,\\
&-2\omega\lambda' + (-X + \omega Y)\,\nu' = 0\,.
\end{aligned} \tag{24}$$

Die ω-Gleichung lautet:

$$\begin{vmatrix} -X + \omega Y & 0 & -2\omega \\ 0 & -X + \omega Y & 2 \\ -2\omega & 2 & -X + \omega Y \end{vmatrix} = 0$$

und hat folgende Wurzeln:

$$\omega_1 = \frac{X}{Y}, \quad \omega_{2,3} = \frac{XY \pm 2\sqrt{X^2 + Y^2 - 4}}{Y^2 - 4}\,.$$

Zu jeder Wurzel ω gehört ein Wertsystem λ', μ', ν', das den Gleichungen (24) genügt, und zwar wie folgt:

$$\lambda' : \mu' : \nu' = Y : X : 0.$$

$$\lambda' : \mu' : \nu' = XY + \sqrt{X^2+Y^2-4} : -(Y^2-4) : 2X + Y\sqrt{X^2+Y^2-4}. \tag{25}$$

$$\lambda' : \mu' : \nu' = XY + \sqrt{X^2+Y^2-4} : -(Y^2-4) : 2X - Y\sqrt{X^2+Y^2-4}.$$

Die drei homogenen linearen Funktionen y_1, y_2, y_3 von λ, μ, ν, die so gewählt sind, daß jede unter ihnen für je zwei der gefundenen Wertsysteme (25) verschwindet, ergeben sich wie nachstehend:

$$y_1 = \begin{vmatrix} \lambda & Y & XY + 2\sqrt{X^2+Y^2-4} \\ \mu & X & -(Y^2-4) \\ \nu & 0 & 2X + Y\sqrt{X^2+Y^2-4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & Y & 2\sqrt{X^2+Y^2-4} \\ \mu & X & -(X^2+Y^2-4) \\ \nu & 0 & 2X + Y\sqrt{X^2+Y^2-4} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\lambda X - \mu Y - \nu\sqrt{X^2+Y^2-4}\right)\left(2X + Y\sqrt{X^2+Y^2-4}\right).$$

$$y_2 = \begin{vmatrix} \lambda & Y & XY - 2\sqrt{X^2+Y^2-4} \\ \mu & X & -(Y^2-4) \\ \nu & 0 & 2X - Y\sqrt{X^2+Y^2-4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & Y & -2\sqrt{X^2+Y^2-4} \\ \mu & X & -(X^2+Y^2-4) \\ \nu & 0 & 2X - Y\sqrt{X^2+Y^2-4} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\lambda X - \mu Y + \nu\sqrt{X^2+Y^2-4}\right)\left(2X - Y\sqrt{X^2+Y^2-4}\right).$$

$$y_3 = \begin{vmatrix} \lambda & XY + 2\sqrt{X^2+Y^2-4} & XY - 2\sqrt{X^2+Y^2-4} \\ \mu & -(Y^2-4) & -(Y^2-4) \\ \nu & 2X + Y\sqrt{X^2+Y^2-4} & 2X - Y\sqrt{X^2+Y^2-4} \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{X^2+Y^2-4}\begin{vmatrix} \lambda & XY & 2 \\ \mu & -(Y^2-4) & 0 \\ \nu & 2X & Y \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda Y + \mu X - 2\nu)(-Y^2+4)\sqrt{X^2+Y^2-4}.$$

Aus den drei Gleichungen für y_1, y_2, y_3, in denen wir die von λ, μ, ν unabhängigen Faktoren unberücksichtigt lassen, ergeben sich die drei homogenen linearen Funktionen λ, μ, ν in ihrer Abhängigkeit von y_1, y_2, y_3, nämlich wie folgt:

$$\lambda D = y_1\left(2Y - X\sqrt{X^2+Y^2-4}\right) - y_2\left(2Y + X\sqrt{X^2+Y^2-4}\right) - y_3\, 2Y\sqrt{X^2+Y^2-4},$$

$$\mu D = y_1\left(2X + Y\sqrt{X^2+Y^2-4}\right) - y_2\left(2X - Y\sqrt{X^2+Y^2-4}\right) - y_3\, 2X\sqrt{X^2+Y^2-4}, \tag{26}$$

$$\nu D = (X^2+Y^2)(y_1 - y_2),$$

$$D = -2(X^2+Y^2)\sqrt{X^2+Y^2-4}.$$

Werden die Werte von λ, μ, ν aus (26) in die 3 Gleichungen von (18) eingesetzt, so erhält man folgendes Gleichungssystem, in dem in den beiden ersten Gleichungen die Variabeln y_1, y_2, y_3 nur quadratisch vorkommen:

$$\begin{aligned}
&y_1^2\left(2Y - X\sqrt{X^2+Y^2-4}\right) - y_2^2\left(2Y + X\sqrt{X^2+Y^2-4}\right)\\
&\quad - y_3^2\, 2X\sqrt{X^2+Y^2-4} + 6X(X^2+Y^2)\sqrt{X^2+Y^2-4} = 0,\\
&-y_1^2\left(2X + Y\sqrt{X^2+Y^2-4}\right) + y_2^2\left(2X - Y\sqrt{X^2+Y^2-4}\right)\\
&\quad - y_3^2\, 2Y\sqrt{X^2+Y^2-4} + 6Y(X^2+Y^2)\sqrt{X^2+Y^2-4} = 0,\\
&+y_1^2\left\{-2Z(X^2+Y^2)^2 + 4\left[4XY - XY(X^2+Y^2-4)\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. + 2\sqrt{X^2+Y^2-4}\,(-X^2+Y^2)\right]\right\}\\
&+y_2^2\left\{-2Z(X^2+Y^2)^2 + 4\left[4XY - XY(X^2+Y^2-4)\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. + 2\sqrt{X^2+Y^2-4}\,(X^2-Y^2)\right]\right\}\\
&+4y_3^2(X^2+Y^2-4)\left[-Z(X^2+Y^2) + 4XY\right]\\
&\qquad + 8y_1y_2(X^2+Y^2)(2Z - XY)\\
&+8y_1y_3\sqrt{X^2+Y^2-4}\left[Z(X^2+Y^2) - 4XY\right.\\
&\qquad \left. + \sqrt{X^2+Y^2-4}\,(X^2-Y^2)\right]\\
&+8y_2y_3\sqrt{X^2+Y^2-4}\left[-Z(X^2+Y^2) + 4XY\right.\\
&\qquad \left. + \sqrt{X^2+Y^2-4}\,(X^2-Y^2)\right]\\
&\qquad + 16Z(X^2+Y^2)(X^2+Y^2-4) = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen von (27) ergeben sich:

$$y_1^2 = 3(X^2+Y^2) - y_3^2,$$

$$y_2^2 = 3(X^2+Y^2) - y_3^2.$$

Hieraus folgen die nachstehenden Wertepaare y_1, y_2:

$$
\begin{aligned}
&y_1 = \sqrt{3(X^2+Y^2)-y_3^2}, \quad y_2 = \sqrt{3(X^2+Y^2)-y_3^2};\\
&y_1 = -\sqrt{3(X^2+Y^2)-y_3^2}, \quad y_2 = -\sqrt{3(X^2+Y^2)-y_3^2};\\
&y_1 = \sqrt{3(X^2+Y^2)-y_3^2}, \quad y_2 = -\sqrt{3(X^2+Y^2)-y_3^2};\\
&y_1 = -\sqrt{3(X^2+Y^2)-y_3^2}, \quad y_2 = \sqrt{3(X_2+Y^2)-y_3^2}.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Werden die ersten beiden Wertepaare y_1, y_2 von (28) in die dritte Gleichung von (27) eingesetzt, so ergibt sich:

$$-3XY(X^2+Y^2)+2XYy_3^2 = \pm y_3\sqrt{3(X^2+Y^2)-y_3^2}(X^2-Y^2).$$

Wir quadrieren die letzte Gleichung und erhalten:

$$y_3^4 - 3y_3^2(X^2+Y^2)+9X^2Y^2 = 0.$$

Hiernach ist:

$$y_3^2 = 3X^2; \qquad y_3^2 = 3Y^2.$$

Damit erhalten wir 4 Wertsysteme y_1, y_2, y_3, die unseren 3 Gleichungen (27) genügen, nämlich:

$$
\begin{aligned}
&y_1 = \sqrt{3}Y, \quad y_2 = \sqrt{3}Y, \quad y_3 = -\sqrt{3}X;\\
&y_1 = -\sqrt{3}Y, \quad y_2 = -\sqrt{3}Y, \quad y_3 = \sqrt{3}X;\\
&y_1 = \sqrt{3}X, \quad y_2 = \sqrt{3}X, \quad y_3 = \sqrt{3}Y;\\
&y_1 = -\sqrt{3}X, \quad y_2 = -\sqrt{3}X, \quad y_3 = -\sqrt{3}Y.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Wir setzen nunmehr die beiden letzten Wertepaare y_1, y_2 von (28) in die 3. Gleichung von (27) ein. Es ergibt sich dann:

$$
\begin{aligned}
&6(X^2+X^2)[-Z(X^2+Y^2)+2XY]\\
&\qquad + y_3^2[-8XY+2Z(X^2+Y^2)+XY(X^2+Y^2)]\\
&= \pm y_3\sqrt{3(X^2+Y^2)-y_3^2}\sqrt{X^2+Y^2-4}\,[Z(X^2+Y^2)-4XY].
\end{aligned}
$$

Wird diese Gleichung quadriert, so folgt:

$$
\begin{aligned}
&y_3^4(X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2-4XYZ)\\
&+3y_3^2[-Z(X^2+Y^2)^2-8X^2Y^2-4Z^2(X^2+Y^2)+4XYZ(X^2+Y^2)\\
&\qquad +16XYZ]+36[-Z(X^2+Y^2)+2XY]^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Man erhält hiernach:

$$y_3^2 = 12; \qquad y_3^2 = \frac{3[Z(X^2+Y^2)-2XY]^2}{X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2-4XYZ}.$$

Hieraus ergeben sich 4 Wertesysteme y_1, y_2, y_3, die den Gleichungen (27) genügen, nämlich wie folgt:

$$
\left.\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt{3(X^2+Y^2-4)};\\
y_2 &= -\sqrt{3(X^2+Y^2-4)};\\
y_3 &= 2\sqrt{3}.\\
y_1 &= -\sqrt{3(X^2+Y^2-4)};\\
y_2 &= \sqrt{3(X^2+Y^2-4)};\\
y_3 &= -2\sqrt{3}.
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
y_1 &= \frac{XY\sqrt{3(X^2+Y^2-4)}}{\sqrt{X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2-4XYZ}};\\
y_2 &= \frac{-XY\sqrt{3(X^2+Y^2-4)}}{\sqrt{X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2-4XYZ}};\\
y_3 &= \frac{-\sqrt{3}\,[Z(X^2+Y^2)-2XY]}{\sqrt{X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2-4XYZ}}.\\
y_1 &= \frac{-XY\sqrt{3(X^2+Y^2-4)}}{\sqrt{X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2-4XYZ}};\\
y_2 &= \frac{XY\sqrt{3(X^2+Y^2-4)}}{\sqrt{X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2-4XYZ}};\\
y_3 &= \frac{\sqrt{3}\,[Z(X^2+Y^2)-2XY]}{\sqrt{X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2-4XYZ}}.
\end{aligned}\right\} \quad (30)
$$

Werden die Wertesysteme y_1, y_2, y_3 von (29) und (30) der Reihe nach in die Gleichungen (26) eingesetzt, so kommen wir auf die gesuchten 8 Lösungen für λ, μ, ν:

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda &= 0; & \lambda &= 0;\\
\mu &= \sqrt{3}; & \mu &= -\sqrt{3};\\
\nu &= 0. & \nu &= 0.\\
\lambda &= -\sqrt{3}; & \lambda &= \sqrt{3};\\
\mu &= 0; & \mu &= 0;\\
\nu &= 0. & \nu &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (31)
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\lambda = 0; & \lambda = 0; \\
\mu = 0; & \mu = 0; \\
\nu = -\sqrt{3}. & \nu = \sqrt{3}.
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\lambda = \dfrac{-\sqrt{3}\,YZ}{\sqrt{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - 4XYZ}}; \\
\mu = \dfrac{-\sqrt{3}\,XZ}{\sqrt{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - 4XYZ}}; \\
\nu = \dfrac{-\sqrt{3}\,XY}{\sqrt{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - 4XYZ}}.
\end{array}
\right. \qquad (31)
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\lambda = \dfrac{\sqrt{3}\,YZ}{\sqrt{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - 4XYZ}}; \\
\mu = \dfrac{\sqrt{3}\,XZ}{\sqrt{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - 4XYZ}}; \\
\nu = \dfrac{\sqrt{3}\,XY}{\sqrt{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - 4XYZ}}.
\end{array}
\right.
$$

Wir betrachten zunächst kurz die ersten 6 Tripel von Lösungen aus (31). Jedes von ihnen ergibt als geometrischen Ort für X, Y, Z den ganzen Raum. Setzt man diese 6 Wertesysteme in die erste Gleichung von (16) ein, so folgt $\varepsilon = \pm\infty$, d. h. jeder beliebige Punkt P ist anzusehen als Mittelpunkt von 6 unendlich großen und ebensoviel hierzu symmetrischen regulären Tetraedern, die einem gegebenen regelmäßigen Vierflach einbeschrieben sind. Wir wollen die ersten 6 Vierflache aus dem Ausgangstetraeder $F_1F_2F_3F_4$ herleiten und gehen zu diesem Zweck auf die Formeln (5) zurück. Betrachten wir z. B. die beiden Fälle $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = \pm\sqrt{3}$, für die also $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \operatorname{tg}^2\dfrac{\vartheta}{2} = 3$ ist, so erhalten wir $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \pm 1$, $\vartheta = 120^0$, d. h. wir gelangen von dem Ausgangstetraeder $F_1F_2F_3F_4$ in folgender Weise auf die entsprechenden beiden unendlich großen einbeschriebenen Tetraeder, die als

Mittelpunkt den beliebigen Punkt P besitzen. Wird das Vierflach $F_1F_2F_3F_4$ um die Z-Achse um den Winkel 120^0 nach beiden Seiten gedreht, so sind danach in beiden Fällen die Geraden OF_1, OF_2, OF_3, OF_4 entsprechend parallel zu den Seitenflächen $P_2P_3P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_2P_4$. Jetzt hat man diese beiden unendlich großen einbeschriebenen Tetraeder nur noch parallel so zu verschieben, daß der Mittelpunkt O mit dem beliebigen Punkt P zusammenfällt. Die weiteren 4 unendlich großen einbeschriebenen Tetraeder erhalten wir dadurch, daß wir $F_1F_2F_3F_4$ in entsprechender Weise um die X- und Y-Achse drehen und dann ebenfalls die Parallelverschiebung wieder derart vornehmen, daß der Nullpunkt O nach P gelangt. Die übrigen sechs unendlich großen einbeschriebenen regelmäßigen Vierflache mit demselben Mittelpunkt P ergeben sich dadurch, daß man die ersteren unendlich großen Tetraeder an P spiegelt. Wir haben damit folgendes Resultat:

Satz V: „Jeder beliebige Punkt P ist Mittelpunkt von 12 unendlich großen regulären Tetraedern, die sich einem beliebig gegebenen regelmäßigen Vierflach einbeschreiben lassen. Diese 12 unendlich großen einbeschriebenen Tetraeder sind so um P angeordnet, daß 6 von ihnen durch Spiegelung an P in die übrigen 6 übergeführt werden können. In jedem solchen einbeschriebenen regulären Tetraeder sind die Verbindungslinien von P mit den Eckpunkten zu je einer Seitenfläche des Ausgangstetraeders parallel."

Werden das 7. bezw. 8. Wertetripel λ, μ, ν aus (31) in die erste Gleichung (16) eingesetzt, so erhalten wir für beide Tripel die bereits in (17) angemerkte Relation, d. h. der geometrische Ort für die Schwerpunkte von gleichstimmig-kongruenten regulären Tetraedern, die einem gegebenen regelmäßigen Vierflach einbeschrieben sind, besteht aus 2 zusammenfallenden St. F. Diese Bemerkung gilt auch für die in § 1 angestellten allgemeinen Betrachtungen, weil nämlich die Parameterwerte λ, μ, ν und

ebenfalls $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ bei gleichem ε denselben Punkt der betr. St. F. ergeben.

Weiterhin setzen uns die Gleichungen (31) instand, für jeden beliebigen Punkt P mit den Koordinaten X, Y, Z die entsprechenden Werte von λ, μ, ν und ε anzugeben. Aus den beiden letzten Wertetripeln von (31) geht hervor, daß jeder Punkt P, dessen Koordinaten ein negatives Produkt ergeben, Schwerpunkt von 3 reellen einbeschriebenen regelmäßigen Vierflachen ist. Die Punkte der übrigen Oktanten, in denen also sign $(XYZ) = +1$ ist, haben für reelle Werte von λ, μ, ν noch der Bedingung

$$X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - 4\,XYZ > 0$$

zu genügen, d. h. sie müssen in den betreffenden Oktanten im im Äußern der St. F.

$$X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - 4\,XYZ = 0$$

gelegen sein. Ferner sind folgende ausgezeichnete Fälle besonders zu beachten:

Wird P in einer Koordinatenebene beliebig angenommen, wobei die Punkte der Koordinatenachsen nicht eingeschlossen sind, dann bekommt man auf Grund der 7. und 8. Gleichung in (31) für $X = 0$, $Y \neq 0$, $Z \neq 0$ bezw. $X \neq 0$, $Y = 0$, $Z \neq 0$ bezw. $X \neq 0$, $Y \neq 0$, $Z = 0$ der Reihe nach die folgenden Werte:

$$\begin{array}{lll} \lambda = \pm\sqrt{3}, & \lambda = 0, & \lambda = 0, \\ \mu = 0, & \mu = \pm\sqrt{3}, & \mu = 0, \\ \nu = 0; & \nu = 0; & \nu = \pm\sqrt{3}. \end{array} \tag{32}$$

Liegt der Punkt P auf einer Koordinatenachse, so werden die Ausdrücke für λ, μ, ν in (31) unbestimmt. Betrachten wir in einem solchen Falle einmal die Gleichungen (18). Diese ergeben beispielsweise für $X = 0$, $Y = 0$, $Z \neq 0$:

$$\begin{gathered} \mu\nu = 0, \\ \lambda\nu = 0, \\ (3 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)\,Z + 4\,\lambda\mu = 0. \end{gathered}$$

Für $\nu = 0$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ wird die dritte Gleichung unbestimmt. Dagegen erweisen sich die Werte (32) wieder als Lösungen.

Durch die vorangegangene Betrachtung ist dargetan, daß die Punkte der Koordinatenebenen mit Ausnahme des Nullpunktes keine Schwerpunkte von endlich großen einbeschriebenen regelmäßigen Tetraedern sein können, daß also bei sämtlichen St. F. (16) die 3 Doppelgeraden eine Ausnahmestellung einnehmen.

Wir wollen noch den speziellen Fall $X = Y = Z = 0$ erörtern, mit anderen Worten, wir wollen die sämtlichen einbeschriebenen regulären Tetraeder aufsuchen, deren Schwerpunkte mit dem Schwerpunkte des Ausgangstetraeders zusammenfallen. Werden in den Gleichungen (18) $X = Y = Z = 0$ gesetzt, so hat man:

$$\mu\nu = 0, \qquad \lambda\nu = 0, \qquad \lambda\mu = 0.$$

Diesen 3 Gleichungen genügen folgende Wertesysteme:

$$\begin{array}{lll} \lambda = 0, & \lambda = 0, & \lambda = \varkappa, \\ \mu = 0, & \mu = \varkappa, & \mu = 0, \\ \nu = \varkappa; & \nu = 0; & \nu = 0; \end{array}$$

wobei $\varkappa$ beliebig ist. Unter Berücksichtigung von (5) ergeben sich die nachstehenden Tripel von Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$:

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha = 0, & \cos\alpha = 0, & \cos\alpha = \pm 1, \\ \cos\beta = 0, & \cos\beta = \pm 1, & \cos\beta = 0, \\ \cos\gamma = \pm 1; & \cos\gamma = 0; & \cos\gamma = 0. \end{array}$$

Das sind die 3 Achsen unseres Koordinatensystems. Es läßt sich eine einfache geometrische Konstruktion für die einbeschriebenen regulären Tetraeder mit gemeinsamem Schwerpunkt O angeben, die sich wie folgt ergibt.

Wenn man das regelmäßige Tetraeder $F_1F_2F_3F_4$ um eine der Koordinatenachsen rotieren läßt, so bewegen sich die Geraden OF_1, OF_2, OF_3, OF_4 — es sind nämlich die Körperdiagonalen eines Würfels — auf demselben Kreiskegel. Als geometrischer Ort für die Ecken der einbeschriebenen regulären Tetraeder mit gemeinsamem Schwerpunkt O ergibt sich somit die Durchdringung der von den Würfelkörperdiagonalen gebildeten Kreiskegel mit den Grenzebenen des regelmäßigen Vierflachs $P_1P_2P_3P_4$.

Diese Kegel besitzen dieselben Öffnungswinkel wie die von den drei Koordinatenachsen gebildeten geraden Kegel und sind daher gleichseitig, d. h. sie enthalten unendlich viele Tripel aufeinander senkrecht stehender Erzeugenden. Jede auf einer Erzeugenden eines gleichseitigen Kegels senkrecht stehende Ebene schneidet aber aus der Fläche eine gleichseitige Hyperbel aus. Da im vorliegenden Falle jede Grenzfläche des regulären Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ zu je einer Erzeugenden der drei gleichseitigen Kegel senkrecht steht, so folgt, daß jede Tetraederseitenfläche von den drei Kegeln in drei gleichseitigen Hyperbeln geschnitten wird. Figur 3 zeigt demgemäß den geometrischen Ort der Eckpunkte aller einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeder mit gemeinsamem Schwerpunkt O auf einer Seitenfläche des Tetraeders: 3 gleichseitige Hyperbeln, die sich im Mittelpunkte und in den drei Eckpunkten schneiden. Die einbeschriebenen regelmäßigen Vierflache, die zu den im Flächenmittelpunkt sich schneidenden Zweigen der 3 Hyperbeln gehören, sind gleichsinnig, wohingegen die den drei anderen Zweigen zugeordneten einbeschriebenen regulären Tetraeder zu den ersteren gegensinnig sind. Das kleinste aller möglich einzuschreibenden Körper der ersten Schar wird erhalten, wenn man die Mitten der Seitenflächen von $P_1P_2P_3P_4$ verbindet. Von dem kleinsten der zweiten Schar fallen die Ecken mit denen des Ausgangstetraeders $P_1P_2P_3P_4$ zusammen. Diese Minimumeigenschaften ergeben sich aus der 1. Gleichung von (16), wenn man sie wie folgt schreibt:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \frac{3\,(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 3}.$$

Wir fassen die Resultate unserer letzten Untersuchungen in dem folgenden Satz kurz zusammen:

Satz VI: „Um die Raumpunkte bezüglich des regulären Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ zu charakterisieren, ob sie Schwerpunkte von endlich großen, dem Ausgangstetraeder einbeschriebenen regelmäßigen Vierflachen sind, fassen wir in $P_1P_2P_3P_4$ die 3 Verbindungslinien der Mitten der

3 Paare gegenüberliegender Kanten als Koordinatenachsenkreuz auf. Die Punkte der Koordinatenebenen rechnen dann nicht zu den erwähnten Punkten mit Ausnahme des Ursprungs. Dieser ist Schwerpunkt von unendlich vielen einbeschriebenen regelmäßigen Tetraedern, deren Endpunkte auf jeder Seitenfläche des Ausgangstetraeders auf 3 gleichseitigen Hyperbeln liegen. Jeder Punkt in den 4 Raumoktanten, in denen sich auch die Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 befinden, ist Schwerpunkt von zwei reellen, jedesmal gleichsinnig einbeschriebenen regelmäßigen Vierflachen. Alle übrigen einbeschriebenen regulären Tetraeder sind zu den letzteren ungleichstimmig, und ihre Schwerpunkte liegen in den weiteren 4 Raumoktanten im Äußeren einer gewissen St. F.“

§ 4.

Metrische Erzeugung der beliebigen St. F.

Satz VII: „Läßt man das beliebige Tetraeder $F_1F_2F_3F_4$ um sämtliche durch den beliebig gewählten Punkt O gehende Geraden um dieselbe Amplitude rotieren und legt man jedesmal durch die den Eckpunkten F_1, F_2, F_3, F_4 entsprechenden neuen Ecken Ebenen, die der Reihe nach senkrecht auf den Geraden OF_1, OF_2, OF_3, OF_4 stehen, so liegen in den von den letzteren Ebenen gebildeten Tetraedern entsprechende Punkte auf St. F.“

Die angegebene metrische Erzeugungsweise der beliebigen St. F. soll zunächst analytisch bewiesen werden. Zu dem Zweck wählen wir den beliebigen Punkt O als Nullpunkt eines festen rechtwinkligen Kartesischen Koordinatensystems, in dem die Eckpunkte des Tetraeders $F_1F_2F_3F_4$ folgende Koordinaten haben mögen:

(33) $\qquad F_i: \quad a_i, \quad b_i, \quad c_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

Dann lauten die Gleichungen der Ebenen, die der Reihe nach senkrecht auf OF_1, OF_2, OF_3, OF_4 stehen und deren senkrechte Abstände bezüglich O proportional den Größen d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sind, folgendermaßen:

$$a_i x + b_i y + c_i z - d_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{34}$$

Werden die Koordinaten von F_i der orthogonalen Transformation (4) unterworfen und dann in (34) eingesetzt, so ergeben sich die nachstehenden Werte von d_i:

$$d_i = \frac{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + \lambda^2(a_i^2 - b_i^2 - c_i^2) + \mu^2(-a_i^2 + b_i^2 - c_i^2)}{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)} + \frac{\nu^2(-a_i^2 - b_i^2 + c^2) + 4(a_i b_i \lambda\mu + a_i c_i \lambda\nu + b_i c_i \mu\nu)}{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{35}$$

Die Koordinaten der Eckpunkte der von den Ebenen (34) gebildeten Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ lauten wie folgt:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}, \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \\ a_4 & d_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}, \quad z_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}};$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_3 & d_3 & c_3 \\ a_4 & d_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}, \quad z_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}; \tag{36}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}, \quad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_4 & d_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}, \quad z_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}};$$

$$(36)\quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad y_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad z_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Ein beliebiger homologer Punkt X, Y, Z in sämtlichen Tetraedern $P_1P_2P_3P_4$ hat nun die nachstehenden Koordinaten:

$$(37)\quad X = i\sum_{1,2,3,4} a_i x_i,\quad Y = i\sum_{1,2,3,4} a_i y_i,\quad Z = i\sum_{1,2,3,4} a_i z_i.$$

Wir setzen in die letzten Gleichungen für x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Werte aus (36) ein und verwenden hierbei für d_i die Größen (35). Dann nehmen die Koordinaten X, Y, Z folgende Formen an:

$$(37a)\quad X = \frac{q_1 + h_1}{(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)},\quad Y = \frac{q_2 + h_2}{(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)},$$

$$Z = \frac{q_3 + h_3}{(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}.$$

In (37a) bedeuten h_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ homogene quadratische Formen in λ, μ, ν und q_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sind Ausdrücke, die λ, μ, ν nicht enthalten. Zu den Gleichungen (37a) tritt noch die Bedingung:

$$(38)\quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2},$$

die besagt, daß von allen orthogonalen Substitutionen mit den 3 unabhängigen Parametern λ, μ, ν nur diejenigen berücksichtigt werden sollen, die das alte Achsenkreuz durch Drehungen um sämtliche durch O gehende Geraden als Achsen um die Amplitude ϑ in das neue überführen. Wenn man aus jeder Koordinate in (37a) und der Gleichung (38) die absoluten Glieder eliminiert, so erhält man dadurch X, Y, Z als gebrochene rationale homogene Funktionen der drei unabhängigen Parameter λ, μ, ν mit denselben Nennern, d. h. also eine Parameterdarstellung für die Punkte einer St. F., die ihrer Erzeugungsweise entsprechend

4 doppelt berührende endliche Kegelschnitte besitzt. Anschließend wollen wir ein spezielles Beispiel betrachten.

§ 5.

Erzeugung von St. F. mit Doppelgeraden, die aufeinander senkrecht stehen.

Nimmt man O als Schwerpunkt des gleichflächigen Tetraeders $F_1F_2F_3F_4$ an, so kann man die Koordinaten von F_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ in folgender Weise wählen:

$$\begin{aligned} F_1&: \quad a, \quad b, \quad c; \\ F_2&: -a, \quad b, -c; \\ F_3&: -a, -b, \quad c; \\ F_4&: \quad a; -b, -c. \end{aligned} \tag{39}$$

Dann lauten die Gleichungen (34) wie nachstehend:

$$\begin{aligned} ax + by + cz - d_1 &= 0, \\ -ax + by - cz - d_2 &= 0, \\ -ax - by + cz - d_3 &= 0, \\ ax - by - cz - d_4 &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Ferner ergeben sich für $d_i (i = 1, 2, 3, 4)$ folgende Werte:

$$\begin{aligned} d_1 &= \sum + \frac{4(ab\lambda\mu + ac\lambda\nu + bc\mu\nu)}{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}, \\ d_2 &= \sum + \frac{4(-ab\lambda\mu + ac\lambda\nu - bc\mu\nu)}{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}, \\ d_3 &= \sum + \frac{4(ab\lambda\mu - ac\lambda\nu - bc\mu\nu)}{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}, \\ d_4 &= \sum + \frac{4(-ab\lambda\mu - ac\lambda\nu + bc\mu\nu)}{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}, \text{ wobei} \end{aligned} \tag{41}$$

$$\sum = \frac{(a^2 + b^2 + c^2) + \lambda^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)} \\ \frac{+ \mu^2 (-a^2 + b^2 - c^2) + \nu^2 (-a^2 - b^2 + c^2)}{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}$$

bedeutet.

Statt der Koordinaten (36) haben wir hier:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{bc(d_2+d_3)}{2abc}, & y_1 &= -\frac{ac(d_3+d_4)}{2abc}, & z_1 &= -\frac{ab(d_4+d_2)}{2abc};\\
x_2 &= \frac{bc(d_1+d_4)}{2abc}, & y_2 &= -\frac{ac(d_4+d_3)}{2abc}, & z_2 &= \frac{ab(d_3+d_1)}{2abc};\\
x_3 &= \frac{bc(d_4+d_1)}{2abc}, & y_3 &= \frac{ac(d_1+d_2)}{2abc}, & z_3 &= -\frac{ab(d_2+d_4)}{2abc};\\
x_4 &= -\frac{bc(d_3+d_2)}{2abc}, & y_4 &= \frac{ac(d_2+d_1)}{2abc}, & z_4 &= \frac{ab(d_1+d_3)}{2abc}.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Wollen wir nun z. B. den geometrischen Ort für die Schwerpunkte in sämtlichen Tetraedern aufsuchen, deren Eckpunkte durch (42) wiedergegeben sind, so erhalten wir als Koordinaten dieser Schwerpunkte:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{bc(d_1-d_2-d_3+d_4)}{4abc},\\
Y &= \frac{ac(d_1+d_2-d_3-d_4)}{4abc},\\
Z &= \frac{ab(d_1-d_2+d_3-d_4)}{4abc}.
\end{aligned}
$$

Setzt man hierin die Werte für d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ aus (41) ein, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{4b^2c^2\mu\nu}{abc(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)},\\
Y &= \frac{4a^2c^2\lambda\nu}{abc(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)},\\
Z &= \frac{4a^2b^2\lambda\mu}{abc(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Gehen wir nun mit der weiteren Bedingungsgleichung $\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = \operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}$ in die Koordinaten von (43) ein, so bekommen wir:

$$
(44)\qquad
X=\frac{4\,b^2c^2\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}\cdot\mu\nu}{abc\,(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}\ ,
$$

$$
Y=\frac{4\,a^2c^2\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}\cdot\lambda\nu}{abc\,(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}\ ,
$$

$$
Z=\frac{4\,a^2b^2\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}\cdot\lambda\mu}{abc\,(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}\ .
$$

Die durch diese Parameterdarstellung gekennzeichneten St. F. haben alle 3 Doppelgeraden, die aufeinander senkrecht stehen bezw. mit den 3 Verbindungsgeraden der gegenüberliegenden Kantenmitten des gleichflächigen Tetraeders $F_1F_2F_3F_4$ zusammenfallen.

Dies Ergebnis können wir so aussprechen:

Satz VIII: „Läßt man das gleichflächige Tetraeder $F_1F_2F_3F_4$ um sämtliche durch seinen Schwerpunkt O gehende Geraden um dieselbe Amplitude rotieren und legt man jedesmal durch die den Eckpunkten F_1, F_2, F_3, F_4 entsprechenden neuen Ecken Ebenen, die der Reihe nach senkrecht auf OF_1, OF_2, OF_3, OF_4 stehen, so liegen in den so erhaltenen Tetraedern die Schwerpunkte auf einer St. F., deren Doppelgeraden mit den 3 Verbindungslinien der Mitten der 3 Paare gegenüberliegender Kanten des Ausgangstetraeders zusammenfallen."

§ 6.

Erzeugung der St. F. mit 4 Doppelberührungskreisen. — Konstruktion von gleichstimmig-kongruenten regulären Tetraedern, die einem gegebenen regelmäßigen Tetraeder ein- bezw. umbeschrieben sind.

Wir wollen noch für den Fall, daß in dem letzten Satze $F_1F_2F_3F_4$ regelmäßig ist, die Rauminhalte der aus den

Ebenen (40) gebildeten Tetraeder bestimmen. Die Eckpunkte (42) haben bei dieser Annahme folgende Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{2}(d_2+d_3),\ y_1 = -\frac{1}{2}(d_3+d_4),\ z_1 = -\frac{1}{2}(d_4+d_2);\\
x_2 &= \frac{1}{2}(d_1+d_4),\ y_2 = -\frac{1}{2}(d_4+d_3),\ z_2 = \frac{1}{2}(d_3+d_1);\\
x_3 &= \frac{1}{2}(d_4+d_1),\ y_3 = \frac{1}{2}(d_1+d_2),\ z_3 = -\frac{1}{2}(d_2+d_4);\\
x_4 &= -\frac{1}{2}(d_3+d_2),\ y_4 = \frac{1}{2}(d_2+d_1),\ z_4 = \frac{1}{2}(d_1+d_3).
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Der sechsfache relative Rauminhalt der von den Ebenen (40) gebildeten Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ drückt sich durch die Koordinaten der vorstehenden Ecken folgendermaßen aus:

$$
6\,P_1P_2P_3P_4 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} -(d_2+d_3) & -(d_3+d_4) & -(d_4+d_2) & 1\\ (d_1+d_4) & -(d_4+d_3) & (d_3+d_1) & 1\\ (d_4+d_1) & (d_1+d_2) & -(d_2+d_4) & 1\\ -(d_3+d_2) & (d_2+d_1) & (d_1+d_3) & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} -2(d_1+d_2+d_3+d_4) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2(d_1+d_2+d_3+d_4) & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2(d_1+d_2+d_3+d_4) & 0\\ -(d_3+d_2) & (d_2+d_1) & (d_1+d_3) & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= -(d_1+d_2+d_3+d_4)^3 = -\left(4\frac{3-\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\right)^3
$$

$$
= -\left(4\,\frac{3-\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}}\right)^3.
$$

Hieraus geht hervor, daß bei der gleichen Amplitude ϑ sämtliche Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ gleichstimmig kongruent sind.

Die Schwerpunkte in solchen gleich großen regulären Tetraedern ergeben sich aus den Gleichungen (44), wenn man darin $a = b = c = 1$ setzt, d. h. sie liegen auf einer St. F., deren Doppelberührungsebenen zu den Seitenebenen von $F_1F_2F_3F_4$ parallel sind und deren dreifacher Punkt mit dem Schwerpunkt des Ausgangstetraeders $F_1F_2F_3F_4$ zusammenfällt.

Wir können nun den Satz aussprechen:

Satz IX: „Läßt man das reguläre Tetraeder $F_1F_2F_3F_4$ um sämtliche durch seinen Schwerpunkt O gehende Geraden um dieselbe Amplitude rotieren und legt man jedesmal durch die den Eckpunkten F_1, F_2, F_3, F_4 entsprechenden neuen Ecken Ebenen, die der Reihe nach senkrecht auf OF_1, OF_2, OF_3, OF_4 stehen, so besitzen die so erhaltenen regelmäßigen Tetraeder gleichen Rauminhalt und ihre Schwerpunkte liegen auf einer St. F., deren triplanarer Punkt mit dem Schwerpunkt O zusammenfällt und deren singuläre Ebenen zu den Seitenflächen von $F_1F_2F_3F_4$ parallel sind."

Aus dem letzten Satz ergeben sich geometrische Konstruktionen, wie man einem gegebenen regelmäßigen Vierflach gleich große reguläre Tetraeder ein- oder umbeschreiben kann. Wir wollen hierauf noch kurz eingehen.

Lassen wir das regelmäßige Tetraeder $F_1F_2F_3F_4$ um die durch den Schwerpunkt O gehenden Geraden als Achsen um den gleichen Winkel rotieren und legen wir durch die neuen Eckpunkte F_1^k, F_2^k, F_3^k, F_4^k Ebenen, die der Reihe nach auf den Geraden OF_1, OF_2, OF_3, OF_4 senkrecht stehen, so sind nach dem vorausgegangenen die von diesen Ebenen eingeschlossenen Tetraeder $P_1^kP_2^kP_3^kP_4^k$ gleichstimmig kongruent. Wir haben also ∞^2 viele gleich große reguläre Tetraeder $P_1^kP_2^kP_3^kP_4^k$, denen jedesmal ein regelmäßiges Vierflach $F_1^kF_2^kF_3^kF_4^k$ einbeschrieben ist, und zwar so, daß die letzteren Tetraeder ihrer-

seits wieder kongruent sind. Werden nun zunächst in einem festen zu $P_1^k P_2^k P_3^k P_4^k$ gleichstimmig kongruenten Tetraeder $P_1 P_2 P_3 P_4$ sämtliche solcher homologen Einbeschreibungen vorgenommen durch die entsprechende Wahl der auf den Seitenflächen liegenden Eckpunkte, so ergeben sich damit in dem regelmäßigen Vierflach $P_1 P_2 P_3 P_4$ einbeschriebene regelmäßige Vierflache, die sämtlich zu $F_1 F_2 F_3 F_4$ gleichstimmig kongruent sind. Nimmt man dagegen z. B. in dem regelmäßigen Vierflach $F_1 F_2 F_3 F_4$ die entsprechenden Umbeschreibungen vor, wie sie bei sämtlichen Tetraedern $F_1^k F_2^k F_3^k F_4^k$ und den ihnen jedesmal zugeordneten Vierflachen $P_1^k P_2^k P_3^k P_4^k$ auftreten, dann gewinnt man in dem regelmäßigen Vierflach $F_1 F_2 F_3 F_4$ gleichstimmig kongruente umbeschriebene reguläre Tetraeder.

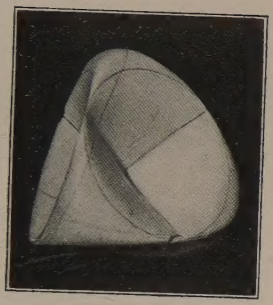

Fig. 1.

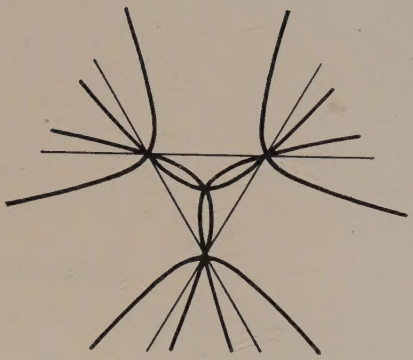

Fig. 3.

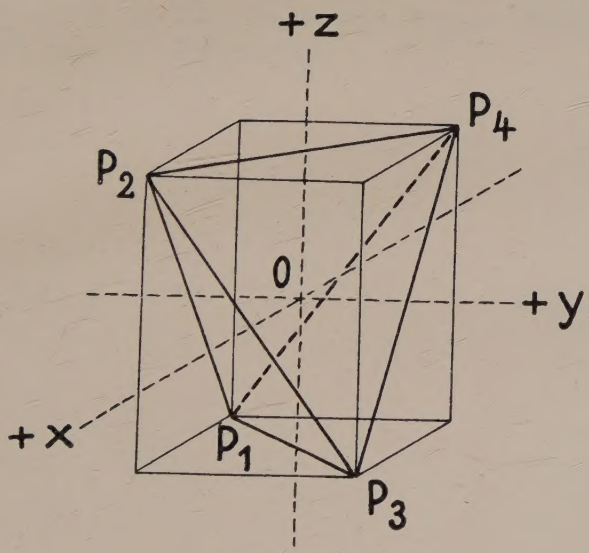

Fig. 2.

Lebenslauf.

Geboren wurde ich, Kurt Friedrich Hartung, als Sohn des Konrektors Friedrich Hartung am 27. März 1893 in Lindstedt (Kreis Gardelegen). Nach bestandener Reifeprüfung an dem Realgymnasium zu Barmen am 15. März 1912 studierte ich bis 1. August 1914 Mathematik und Naturwissenschaften in Münster und Darmstadt. Nach Beendigung des Krieges, an dem ich 4 Jahre teilnahm, setzte ich mein Studium mit längerer Unterbrechung in Berlin, Köln und Münster fort.